

Introduction à la théorie ergodique

Jérémy Zurcher

7 Mars 2024

Résumé

Parmi les différents moyens d'étudier un système dynamique, les probabilistes (et pas que !) aiment ceux qui font intervenir les mesures. En effet, l'un des théorèmes fondateurs de la théorie moderne des Probabilités est la loi des grands nombres. Il en existe pas mal de versions, mais l'idée est toujours la même : une moyenne empirique s'approche de la moyenne stochastique (a.k.a. l'espérance). La théorie ergodique, via les théorèmes ergodiques, peut être vue comme une tentative de généralisation de ce résultat en mesure infinie (la moyenne temporelle s'approche de la moyenne spatiale). Mais cela ne s'arrête pas là. Si les théorèmes ergodiques semblent être le résultat phare de cette théorie, il ne s'agit en fait que de son commencement...

Dans cet exposé, je vous présenterai les enjeux de cette théorie, à travers mon prisme de probabiliste. Je vous présenterai le théorème de récurrence de Poincaré, véritable point de départ de la théorie ergodique, avant d'évoquer les théorèmes ergodiques, et seulement à la fin la notion même d'ergodicité, qui n'est en fait pas du tout nécessaire pour énoncer ces théorèmes. Quelques exemples, empruntés parfois des probas, pour essayer de comprendre les enjeux et quelques démonstrations pour voir comment on peut raisonner dans ce cadre-là. L'orateur est bien sûr obligé de faire quelques choix, et les plus connaisseurs de la théorie ergodique auront peut-être encore faim à la fin de cet alléchant exposé.